Решения задач

9 класс

9.5. Предположим противное. Пусть для определённости $b > a$; тогда $20(b-a) \geqslant 1$, то есть $b - a \geqslant \frac{1}{20}$.

Дискриминант второго трёхчлена в исходном уравнении отрицателен, откуда $100b^2 - 10a < 0$. Значит, $10b^2 < a \leqslant b - \frac{1}{20}$, то есть $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$. Но это невозможно, поскольку дискриминант трёхчлена $f(b) = 10b^2 - b + \frac{1}{20}$ также отрицателен, а старший член положителен.

9.6. **Ответ.** 998 выворачиваний.

Назовём гнома *красным* или *синим*, если на нём надет колпак соответствующего цвета. Заметим, что один гном может сказать требуемую фразу другому тогда и только тогда, когда эти гномы разноцветны: синий гном при этом скажет правду, а красный — солжёт. Теперь, если какие-то три гнома не выворачивали колпаков, то два из них — одного цвета, и они не смогут сказать друг другу требуемого, что неверно. Значит, таких гномов не больше двух, и выворачиваний было не меньше $1000 - 2 = 998$.

Будем говорить, что два гнома *пообщались*, если каждый из них сказал другому заветную фразу. Опишем, как могло случиться всего 998 выворачиваний, если, например, вначале гном Вася был синим, а остальные — красными. В начале дня каждый гном пообщался с Васей. Затем красные гномы по очереди выворачивали свои колпаки. При этом после каждого выворачивания все красные гномы пообщались с изменившим цвет. Когда останется только один красный гном, то любая пара гномов уже пообщается друг с другом (в тот момент, когда первый из них сменил цвет), при этом произошло 998 изменений цвета.

Замечание. Построить пример с 998 изменениями цвета можно, начиная с любой ситуации, в которой не все гномы одноцветны.

9.7. **Ответ.** Бесконечно.

Докажем, что неудачным является любое число вида $n = p^2$, где p — нечётное простое число. Предположим противное, т. е.

$$(y^2 - 1)p^2 = x^2 - 1 \qquad (1)$$

при некоторых натуральных $x, y \neq 1$. Тогда либо $x + 1$, либо $x - 1$ делится на p.

Пусть $x + 1 \,\vdots\, p$. Тогда $x - 1 = (x + 1) - 2$ не делится на p, а тогда из (1) получаем, что $x + 1 \,\vdots\, p^2$, то есть $x = kp^2 - 1$ при некотором натуральном k. Подставляя в (1), получаем $y^2 = \frac{x+1}{p^2}(x-1) + 1 = k(kp^2 - 2) + 1 = k^2p^2 - 2k + 1$. Но $k^2p^2 > k^2p^2 - 2k + 1 > k^2p^2 - 2kp + 1$, то есть $(kp)^2 > y^2 > (kp-1)^2$, что невозможно.

Если же $x - 1 \,\vdots\, p$, то аналогично получаем $x = kp^2 + 1$, $y^2 = k^2p^2 + 2k + 1$, $(kp)^2 < y^2 < (kp+1)^2$, что опять же невозможно.

9.8. Пусть N — середина стороны AC, а K — точка на прямой MN такая, что $MK = MN$. Тогда треугольники MNC и MKB симметричны относительно M и потому равны. Проведём разрез по средней линии MN; переложив треугольник MNC так, чтобы он совпал с $\triangle MKB$, получаем параллелограмм $ANKB$ (см. рис. 1). Если $AN = AB$, то ромб уже получен.

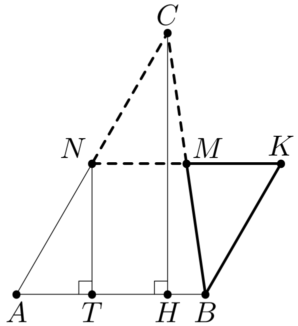

Рис. 1

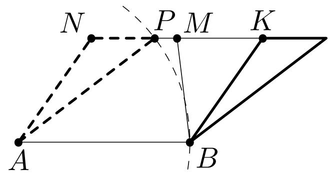

Рис. 2

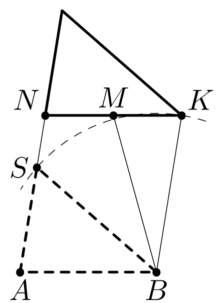

Рис. 3

Пусть $AN < AB$ (см. рис. 2). Проведём окружность с центром в точке A и радиусом AB. Тогда точка N лежит внутри окружности, а M — вне, поэтому окружность пересечёт отрезок NM в точке P. Отрезав от параллелограмма $ANKB$ треугольник APN и сдвинув его так, чтобы сторона AN совпала с BK, мы получим ромб.

Пусть, наконец, $AN > AB$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, основание H высоты CH лежит на отрезке AB (см. рис. 1). Далее, основание T перпендикуляра, опущенного из N на AB, есть середина отрезка AH; значит, $BT > AT$, а тогда $BN > AN$. Значит, окружность с центром в точке B и радиусом AN пересечёт сторону AN в точке S, ибо точка N лежит вне, а точка A — внутри этой окружности (см. рис. 3). Отрезав от параллелограмма треугольник ABS и сдвинув его до совмещения стороны AB со стороной NK, мы получим ромб.

Замечание. Можно доказать, что любой тупоугольный треугольник также можно разрезать требуемым образом. Действительно, если угол B тупой и $AB \geqslant BC$, то медиана AM точно длиннее стороны AB, и при этом $AN < AB$.